

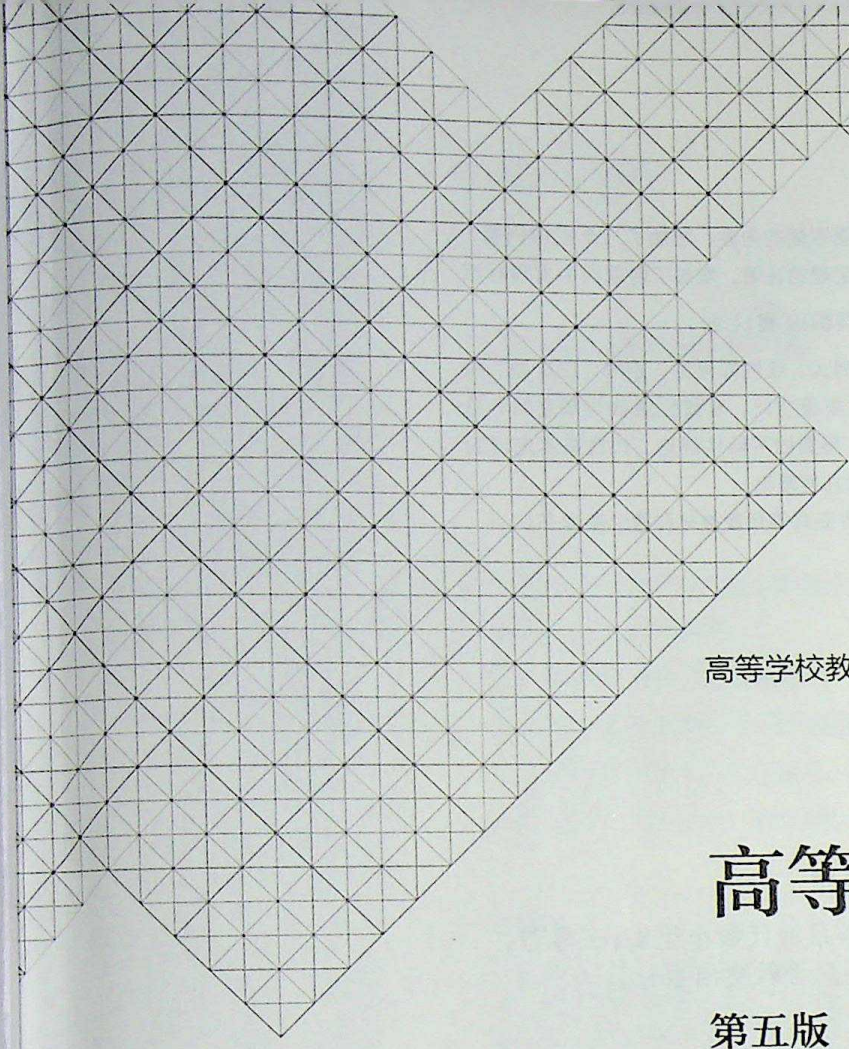
高等学校教材

高等代数

第五版

北京大学数学系前代数小组 编
王萼芳 石生明 修订

高等教育出版社



高等学校教材

高等代数

第五版

北京大学数学系前代数小组 编

王萼芳 石生明 修订

高等教育出版社·北京

内容简介

本书是第五版,基本上保持了第四版的内容,增加了几个应用例题,改写了矩阵的秩一节,补上了维特定理的证明,增加了附录四中有理标准形的内容,适当补充了数字资源(以图标示意)。

本书主要内容是:多项式、行列式、线性方程组、矩阵、二次型、线性空间、线性变换、 λ -矩阵、欧几里得空间、双线性函数与辛空间、总习题,附录包括关于连加号“ Σ ”、整数的可除性理论、代数基本定理的证明、 $\mathcal{A}$ -矩阵与矩阵相似标准形的几何理论。

本书适合作为高等学校数学类专业高等代数教材和教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等代数/北京大学数学系前代数小组编;王萼芳,石生明修订.--5版.--北京:高等教育出版社,2019.5(2023.5重印)

ISBN 978-7-04-050733-1

I.①高… II.①北… ②王… ③石… III.①高等代数-高等学校-教材 IV.①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 237788 号

项目策划 李艳馥 李蕊 兰莹莹

策划编辑 李蕊 责任编辑 李蕊

插图绘制 于博 责任校对 高歌

封面设计 王凌波

版式设计 徐艳妮

责任印制 刁毅

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 山东韵杰文化科技有限公司
开本 787mm×1092mm 1/16
印张 20.75
字数 450千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>
<http://www.hepmall.com>
<http://www.hepmall.cn>
版 次 1978年3月第1版
2019年5月第5版
印 次 2023年5月第12次印刷
定 价 44.60元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物料号 50733-00

目 录

第一章 多项式	1
§ 1 数域	1
§ 2 一元多项式	2
§ 3 整除的概念	5
§ 4 最大公因式	8
§ 5 因式分解定理	12
§ 6 重因式	15
§ 7 多项式函数	16
§ 8 复系数与实系数多项式的因式分解	18
§ 9 有理系数多项式	19
*§ 10 多元多项式	22
*§ 11 对称多项式	26
习题	29
补充题	30
第二章 行列式	33
§ 1 引言	33
§ 2 排列	34
§ 3 n 阶行列式	36
§ 4 n 阶行列式的性质	40
§ 5 行列式的计算	45
§ 6 行列式按一行(列)展开	49
§ 7 克拉默(Cramer)法则	55
*§ 8 拉普拉斯(Laplace)定理·行列式的乘法规则	59
习题	64
补充题	68
第三章 线性方程组	70
§ 1 消元法	70
§ 2 n 维向量空间	75
§ 3 线性相关性	78
§ 4 矩阵的秩	84
§ 5 线性方程组有解判别定理	92
§ 6 线性方程组解的结构	94
*§ 7 二元高次方程组	99
习题	103

补充题	106
第四章 矩阵	108
§ 1 矩阵概念的一些背景	110
§ 2 矩阵的运算	117
§ 3 矩阵乘积的行列式与秩	118
§ 4 矩阵的逆	121
§ 5 矩阵的分块	125
§ 6 初等矩阵	129
§ 7 分块乘法的初等变换及应用举例	132
习题	136
补充题	138
第五章 二次型	138
§ 1 二次型及其矩阵表示	141
§ 2 标准形	148
§ 3 唯一性	152
§ 4 正定二次型	157
习题	158
补充题	160
第六章 线性空间	160
§ 1 集合·映射	163
§ 2 线性空间的定义与简单性质	166
§ 3 维数·基与坐标	170
§ 4 基变换与坐标变换	172
§ 5 线性子空间	174
§ 6 子空间的交与和	177
§ 7 子空间的直和	179
§ 8 线性空间的同构	181
习题	184
补充题	185
第七章 线性变换	185
§ 1 线性变换的定义	187
§ 2 线性变换的运算	190
§ 3 线性变换的矩阵	196
§ 4 特征值与特征向量	203
§ 5 对角矩阵	207
§ 6 线性变换的值域与核	209
§ 7 不变子空间	213
§ 8 若尔当(Jordan)标准形介绍	216
§ 9 最小多项式	219
习题	223
补充题	224
第八章 λ -矩阵	224
§ 1 λ -矩阵	224

§ 2	λ -矩阵在初等变换下的标准形	225
§ 3	不变因子	228
§ 4	矩阵相似的条件	231
§ 5	初等因子	233
§ 6	若尔当标准形的理论推导	236
§ 7	矩阵的有理标准形	240
	习题	242
	补充题	244
第九章	欧几里得空间	245
§ 1	定义与基本性质	245
§ 2	标准正交基	249
§ 3	同构	253
§ 4	正交变换	254
§ 5	子空间	256
§ 6	实对称矩阵的标准形	257
§ 7	向量到子空间的距离 · 最小二乘法	263
§ 8	酉空间介绍	266
	习题	268
	补充题	270
第十章	双线性函数与辛空间	272
§ 1	线性函数	272
§ 2	对偶空间	273
§ 3	双线性函数	276
§ 4	辛空间	282
	习题	286
	总习题	289
附录一	关于连加号“Σ”	293
附录二	整数的可除性理论	295
附录三	代数基本定理的证明	298
附录四	$\mathcal{A}$-矩阵与矩阵相似标准形的几何理论	300

不难看出,这样一个对换可以通过一系列的相邻数的对换来实现.从(3)出发,把 k 与 i_s 对换,再与 i_{s-1} 对换……也就是说,把 k 一位一位地向左移动.经过 $s+1$ 次相邻位置的对换,排列(3)就变成

$$\cdots k j i_1 i_2 \cdots i_s \cdots \quad (5)$$

从(5)出发,再把 j 一位一位地向右移动,经过 s 次相邻位置的对换,排列(5)就变成了排列(4).因之, j, k 对换可以通过 $2s+1$ 次相邻位置的对换来实现. $2s+1$ 是奇数.相邻位置的对换改变排列的奇偶性.显然,奇数次这样的对换的最终结果还是改变奇偶性. |

根据定理 1,可以证明以下重要结论.

推论 在全部 n 阶排列中,奇、偶排列的个数相等,各有 $n!/2$ 个.

证明 假设在全部 n 阶排列中共有 s 个奇排列, t 个偶排列.

将 s 个奇排列中的前两个数字对换,得到 s 个不同的偶排列,因此 $s \leq t$. 同样可证 $t \leq s$, 于是 $s = t$, 即奇、偶排列的总数相等,各有 $n!/2$ 个. |

定理 2 任意一个 n 阶排列与排列 $12 \cdots n$ 都可以经过一系列对换互变,并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性.

证明 我们对排列的阶数 n 作数学归纳法,来证任意一个 n 阶排列都可以经过一系列对换变成 $12 \cdots n$.

1 阶排列只有一个,结论显然成立.

假设结论对 $n-1$ 阶排列已经成立,现在来证对 n 阶排列的情形结论也成立.

设 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是一个 n 阶排列,如果 $j_n = n$,那么根据归纳法假设, $n-1$ 阶排列 $j_1 j_2 \cdots j_{n-1}$ 可以经过一系列对换变成 $12 \cdots (n-1)$, 于是这一系列对换也就把 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 变成 $12 \cdots n$. 如果 $j_n \neq n$,那么对 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 作 j_n, n 对换,它就变成 $j'_1 \cdots j'_{n-1} n$, 这就归结成上面的情形,因此结论普遍成立.

相仿地, $12 \cdots n$ 也可用一系列对换变成 $j_1 j_2 \cdots j_n$, 因为 $12 \cdots n$ 是偶排列,所以根据定理 1,所作对换的个数与排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 有相同的奇偶性. |

§ 3 n 阶行列式

我们现在来给出 n 阶行列式的定义.从这一节开始,我们总是取一固定的数域 P 作为基础,所谈到的数都是指这个数域 P 中的数,所考虑的行列式也都是数域 P 上的行列式,以后就不重复说明了.

在给出 n 阶行列式的定义之前,先来看一下二阶和三阶行列式的定义.我们有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \quad (1)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (2)$$

从二阶和三阶行列式的定义中可以看出,它们都是一些乘积的代数和,而每一项乘积都是由行列式中位于不同的行和不同的列的元素构成的,并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成.在 $n=2$ 时,由不同行不同列的元素构成的乘积只有 $a_{11}a_{22}$ 与 $a_{12}a_{21}$ 这两项,在 $n=3$ 时也不难看出只有(2)中的6项.这是二阶和三阶行列式的特征的一个方面.另一方面,每一项乘积都带有符号.这符号是按什么原则决定的呢?在三阶行列式的展开式(2)中,项的一般形式可以写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}, \quad (3)$$

其中 $j_1j_2j_3$ 是 $1, 2, 3$ 的一个排列.可以看出,当 $j_1j_2j_3$ 是偶排列时,对应的项在(2)中带有正号,当 $j_1j_2j_3$ 是奇排列时带有负号.二阶行列式显然也符合这个原则.

上面对二阶和三阶行列式的分析对于我们理解一般的定义是有帮助的.下面就来给出 n 阶行列式的定义.

定义4 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (4)$$

等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \quad (5)$$

的代数和,这里 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列,每一项(5)都按下列规则带有符号:当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时,(5)带有正号,当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时,(5)带有负号.这一定义可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \quad (6)$$

这里 $\sum_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 阶排列求和.

定义表明,为了计算 n 阶行列式,首先作所有可能由位于不同行不同列元素构成的乘积.把构成这些乘积的元素按行指标排成自然顺序,然后由列指标所成的排列的奇偶性来决定这一项的符号.

由定义立即看出, n 阶行列式是由 $n!$ 项组成的.

下面来看几个例子.

例1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

这是一个4阶行列式,在展开式中应该有 $4!=24$ 项.但是由于出现很多的零,所以不等于零的项数就大大减少了.因为4阶行列式中每个项是由4个元素相乘而得.为了所得的项不等于零,这4个元素必须都不等于零.现在这4个非零元素恰好位于不同行

不同列,所以它们的乘积是这个行列式唯一的一项.前面所带的符号为
 $(-1)^{\tau(4321)} = 1.$

所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

例2 计算上三角形行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (7)$$

我们先来看一下,形如(5)式的项有哪些不为零,然后再来决定它们的符号.项的一般形式为

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

在行列式中第 n 行的元素除去 a_{nn} 以外全为零,因之,只要考虑 $j_n = n$ 的那些项.在第 $n-1$ 行中,除去 $a_{n-1,n-1}, a_{n-1,n}$ 外,其余的项全为零,因之 j_{n-1} 只有 $n-1, n$ 这两个可能.由于 $j_n = n$,所以 j_{n-1} 就不能等于 n 了,从而 $j_{n-1} = n-1$.这样逐步推上去,不难看出,在展开式中,除去

$$a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

这一项外,其余的项全是 0.而这一项的列指标所成的排列是一个偶排列,所以这一项带正号.于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \quad (8)$$

换句话说,这个行列式就等于主对角线(从左上角到右下角这条对角线)上元素的乘积.作为(8)的特殊情形,有

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \cdots d_n, \quad (9)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (10)$$

主对角线以外的元素全为零的行列式称为对三角形行列式.(9)说明了对三角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积.

容易看出,当行列式的元素全是数域 P 中的数时,它的值也是数域 P 中的一个数.

在行列式的定义中,为了决定每一项的正负号,我们把 n 个元素按行指标排起来.事实上,数的乘法是交换的,因而这 n 个元素的次序是可以任意写的,一般地, n 阶行列式中的项可以写成

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}, \quad (11)$$

其中 $i_1 i_2 \cdots i_n, j_1 j_2 \cdots j_n$ 是两个 n 阶排列.利用排列的性质,不难证明,(11)的符号等于

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}. \quad (12)$$

事实上,为了根据定义来决定(11)的符号,就要把这 n 个元素重新排一下,使得它们的行指标成自然顺序,也就是排成

$$a_{1 j'_1} a_{2 j'_2} \cdots a_{n j'_n}. \quad (13)$$

于是它的符号是

$$(-1)^{\tau(j'_1 j'_2 \cdots j'_n)}. \quad (14)$$

现在来证明,(12)与(14)是一致的.我们知道,由(11)变到(13)可以经过一系列元素的对换来实现.每作一次对换,元素的行指标与列指标所成的排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 与 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 就都同时作一次对换,也就是 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 与 $\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 同时改变奇偶性,因而它们的和

$$\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$$

的奇偶性不改变.这就是说,对(11)作一次元素的对换不改变(12)的值.因此,在一系列对换之后有

$$(-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) + \tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} = (-1)^{\tau(12 \cdots n) + \tau(j'_1 j'_2 \cdots j'_n)} = (-1)^{\tau(j'_1 j'_2 \cdots j'_n)}.$$

这就证明了(12)与(14)是一致的.

例如, $a_{21} a_{32} a_{14} a_{43}$ 是 4 阶行列式中一项, $\tau(2314) = 2$, $\tau(1243) = 1$, 于是它的符号应为 $(-1)^{2+1} = -1$. 如按行指标排列起来,就是 $a_{14} a_{21} a_{32} a_{43}$, $\tau(4123) = 3$, 因而它的符号也是 $(-1)^3 = -1$.

按(12)来决定行列式中每一项的符号的好处在于,行指标与列指标的地位是对称的,因而为了决定每一项的符号,我们同样可以把每一项按列指标排起来,于是定义又可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}. \quad (15)$$

由此即得行列式的下列性质:

性质 1 行列互换,行列式不变.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (16)$$

事实上,元素 a_{ij} 在(16)的右端位于第 j 行第 i 列,这就是说, i 是它的列指标, j 是它的行指标.因之,把右端按(15)展开就等于

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

它正是左端按(6)的展开式. |

(16)中等式右边的行列式称为左边行列式的转置行列式. 性质 1 说明行列式转置, 值不变.

性质 1 表明, 在行列式中行与列的地位是对称的, 因之凡是有关行的性质, 对列也同样成立. 例如, 由(8)即得下三角形的行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}. \quad (17)$$

下面我们所谈的行列式的性质大多是对行来说的, 对于列也有相同的性质, 就不重复了.

§ 4 n 阶行列式的性质

行列式的计算是一个重要的问题, 也是一个很麻烦的问题. n 阶行列式一共有 $n!$ 项, 计算它就需做 $n! (n-1)$ 个乘法. 当 n 较大时, $n!$ 是一个相当大的数字. 直接从定义来计算行列式几乎是不可能的事. 因此我们有必要进一步讨论行列式的性质. 利用这些性质可以化简行列式的计算.

在行列式的定义中, 虽然每一项是 n 个元素的乘积, 但是由于这 n 个元素是取自不同的行与列, 所以对于某一确定的行中 n 个元素 (譬如 $a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$) 来说, 每一项都含有其中的一个且只含有其中的一个元素. 因之, n 阶行列式的 $n!$ 项可以分成 n 组, 第一组的项都含有 a_{i1} , 第二组的项都含有 a_{i2} , 等等. 再分别把 i 行的元素提出来, 就有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in}, \quad (1)$$

其中 A_{ij} 代表那些含有 a_{ij} 的项在提出公因子 a_{ij} 之后的代数之和. 至于 A_{ij} 究竟是哪些项的和, 我们暂且不管, 到 § 6 再来讨论. 从以上讨论可以知道, A_{ij} 中不再含有第 i 行的元素, 也就是 $A_{i1}, A_{i2}, \cdots, A_{in}$ 全与行列式中第 i 行的元素无关. 由此即得

性质 2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

第一版荣获第一届全国高等学校优秀教材优秀奖



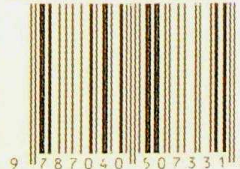
数字课程网站

网址: <http://abook.hep.com.cn/126866>

<http://abook.hep.edu.cn/126866>

数字课程账号 使用说明详见书内数字课程说明页

ISBN 978-7-04-050733-1



9 787040 507331 >

定价 44.60 元